Algebra liniowa II. Lista 2

Zadanie 1. Dano trzy macierze A, B, $C \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ oraz macierz $D \in \mathsf{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$. Macierz A jest zbudowana w ten sposób, że wszystkie wiersze jej wiersze za wyjątkiem k-tego i l-tego są takie, jak odpowiednie wiersze macierzy jednostkowej I, zaś $A_k = \boldsymbol{e}^l$ a $A_l = \boldsymbol{e}^k$. Macierz B ma wszystkie wiersze za wyjątkiem k-tego równe odpowiednim wierszom macierzy jednostkowej, zaś $B_k = \boldsymbol{e}^k + \beta\boldsymbol{e}^l$, gdzie β – pewien skalar . Macierz C ma wszystkie wiersze za wyjątkiem k-tego równe odpowiednim wierszom macierzy jednostkowej zaś $C_k = \gamma\boldsymbol{e}^k$, gdzie γ jest pewnym niezerowym ska- larem.

Wypisz macierze A, B, C przyjmując: $n = 4$, $k = 1$, $l = 3$, $\beta = 3$, $\gamma = -\frac{1}{2}$.

Wykonaj mnożenia AD, BD, CD, gdzie D jakakolwiek macierz 4×3

Wykaż, że iloczyny macierzy AD, BD, CD można otrzymać wykonując na wierszach macierzy D operacje elementarne. Zidentyfikuj je.

Zadanie 2. Uzasadnij algorytm odwracania macierzy poznany na wykładzie.

Zadanie 3. Niech $\mathscr{P}^n(\mathbb{R})$ oznacza przestrzeń wielomianów stopnia co najwyżej n nad $\mathbb{R}$. Niech $a \in \mathbb{R}$ i niech funkcjonał $\delta_a \in \mathscr{P}^n(\mathbb{R})^*$ będzie „braniem wartości wielomianu w argumencie a”, to znaczy, $\delta_a(w) = w(a), w \in \mathscr{P}^n(\mathbb{R})$. Wykazać, że dla dowolnego ciągu $(a_i \in \mathbb{R}\colon i = 0, ..., n)$ różnych liczb, zbiór funkcjonałów $\{\delta_{a_i}\colon i = 0, ..., n\}$ stanowi bazę przestrzeni dualnej $\mathscr{P}^n(\mathbb{R})^*$. Wyznaczyć bazę, w $\mathscr{P}^n(\mathbb{R})$, do której wskazana baza jest dualna.

Zadanie 4. Dla każdej pary $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{v} \in (\mathbb{R}^n)^*$ określmy odwzorowanie $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wzorem:

$$\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}.$$

Uzasadnić jego liniowość. Jak się przedstawia macierz odwzorowania $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}$ w bazach standardowych? Niech $\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}_0$ oznacza inną taka parę. Oblicz złożenie: $(\boldsymbol{u}_0 \otimes \boldsymbol{v}_0) \circ (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})$. Niech $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ oznacza dowolną bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i niech $\boldsymbol{u}^1, \ldots, \boldsymbol{u}^n$ oznacza bazę do niej dualną. Jakie odwzorowanie przedstawia wyrażenie $\boldsymbol{u}_1 \otimes \boldsymbol{u}^1 + \boldsymbol{u}_2 \otimes \boldsymbol{u}^2 + \cdots + \boldsymbol{u}_n \otimes \boldsymbol{u}^n$? Wykaż, że każdy endomorfizm przestrzeni $\mathbb{R}^n$ można przedstawić jako kombinację liniową odwzorowań postaci $\boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Wykaż, że odwzorowania te stanowią bazę przestrzeni endomorfizmów.

Zadanie 5. Niech $\mathbb{C}[a, b]$ oznacza przestrzeń funkcji ciągłych na przedziale $[a, b]$. Wykazać, że przyporządkowanie

$$(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

jest iloczynem skalarnym w $\mathbb{C}[a, b]$.

(i) Niech $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$. Wyznaczyć ciąg (g_i) z ciągu (f_i) za pomocą procedury Grama–Schmidta zakładając, że $a = -1$ i $b = 1$.

(ii) Wykazać, zbiór funkcji $\{1\} \cup \{\cos nx \colon n = 1, 2, \ldots\} \cup \{\sin nx \colon n = 1, 2, \ldots\}$ stanowi układ ortogonalny w $\mathbb{C}[-\pi, \pi]$.

Zadanie 6. Niech odwzorowanie $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie zadane za pomocą macierzy

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wyznacz wartości własne, wektory własne. Znajdź macierz B, że $B^{-1}AB$ ma postać diagonalną.

Zadanie 7. Śladem macierzy $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ nazywamy wielkość $\operatorname{tr} A := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$. Wykazać, że

1. Jeśli dodatkowo $B \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, to $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
2. Jeśli B jest odwracalna, to $\operatorname{tr}(B^{-1}AB) = \operatorname{tr} A$.
3. Jeśli $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, to $\operatorname{tr} A$ jest równy sumie wszystkich pierwiastków równania charakterystycznego $\det(A - \lambda I) = 0$ z uwzględnieniem ich krotności. (Wsk: Skorzystaj z rozkładu Jordana).
4. Niech $\mathsf{M}^{\mathrm{sym}}_{n\times n}(\mathbb{R})$ oznacza przestrzeń macierzy symetrycznych $n \times n$ o współczynnikach w $\mathbb{R}$. Wykazać, że przyporządkowanie $(A, B) \mapsto (A|B) := \operatorname{tr}(AB)$ jest w tej przestrzeni iloczynem skalarnym.